

निर्देश: (1) सभी प्रश्न अनिवार्य हैं।

(2) प्रश्नों के अंक उनके सम्मुख अंकित हैं।

(3) प्रथम प्रश्न से आरम्भ कीजिए और अन्त तक करते जाइए।

1. सभी खण्ड कीजिए।

(प्रत्येक 1 अंक)

(क) $f(x)=x^3$ द्वारा परिमार्जित फलन $f:R \rightarrow R$

(1) एकैकी लेकिन आच्छादक नहीं

(2) एकैकी तथा आच्छादक

(3) बहुएक परन्तु आच्छादक नहीं

(4) बहुएक तथा आच्छादक

(ख) $\sin(\tan^{-1}x)$, $|x| < 1$ बराबर होता है-

(1) $\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$ (2) $\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ (3) $\frac{1}{1+x^2}$ (4) $\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$

(ग) यदि आव्यूह A और B के क्रम क्रमशः $p \times q$ और $q \times r$ हो तो AB का क्रम है-

(1) $p \times r$

(2) $r \times p$

(3) $q \times p$

(4) कोई नहीं

(घ) समाकलन $\int \log x \, dx$ का मान है-

(1) $\frac{1}{x} + c$

(2) $x \log x - x + c$

(3) $x \log x + c$

(4) कोई नहीं

2. सभी खण्ड कीजिए।

(प्रत्येक 2 अंक)

(क) माना $A=\{1,2,3\}$, $B=\{4,5,6,7\}$ तथा $f=\{(1,4),(2,5),(3,6)\}$

A से B पर एक फलन हैं। सिद्ध कीजिए कि f एकैकी फलन है।

(ख) $\sin^{-1}(-1)$ का मुख्य मान ज्ञात कीजिए।

(ग) दिखाइए कि फलन $f(x)=x^3, x=0$ पर सतत् है।

(घ) $x=2$ पर वक्र $y=x^3-x$ की स्पर्श रेखा की प्रवणता ज्ञात कीजिए।

(ङ) यदि $\begin{bmatrix} 3 & x \\ 4 & y \end{bmatrix} = 2 \times \begin{bmatrix} 3/2 & 1 \\ z & 1 \end{bmatrix}$ तो x, y तथा z के मान ज्ञात कीजिए।

3. सभी खण्ड कीजिए।

(प्रत्येक 3 अंक)

(क) यदि $A = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$ तो दर्शाइए कि $A^3=4A$.

(ख) यदि $y=x^{\sin x}$ है तो $\frac{dy}{dx}$ ज्ञात कीजिए।

(ग) $\int \frac{1}{1+\sin x} dx$ का मान ज्ञात कीजिए।

4. सभी खण्ड कीजिए।

(प्रत्येक 3 अंक)

(क) दर्शाइए कि $f: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ जबकि

$$f(x) = \begin{cases} \frac{n+1}{2}, & \text{यदि } x \text{ विषम है।} \\ \frac{n}{2}, & \text{यदि } x \text{ सम है।} \end{cases}$$

एक बहु-एक आच्छादक (Many-one onto function) है।

(ख) सिद्ध कीजिए कि

$$\begin{vmatrix} a+b & b & c \\ b+c & c & a \\ c+a & a & b \end{vmatrix} = 3abc - a^3 - b^3 - c^3$$

{2}

(अ) फलन $\sin^2 y + \cos xy = k$ का अवकलन कीजिए।

(घ) प्रवणता 2 वाली सभी रेखाओं का समीकरण ज्ञात कीजिए जो

$$\text{वक्र } y + \frac{2}{x-3} = 0 \text{ को स्पर्श करती हैं।}$$

5. कोई पाँच खण्ड कीजिए। (प्रत्येक 5 अंक)

(क) सिद्ध कीजिए कि
$$\begin{vmatrix} -a^2 & ab & ac \\ ab & -b^2 & bc \\ ac & bc & -c^2 \end{vmatrix} = 4a^2b^2c^2$$

(ख) यदि $y = \sin^{-1}x$ तो सिद्ध कीजिए $(1-x^2) \frac{d^2y}{dx^2} = x \frac{dy}{dx}$

(ग) ऐसी दो घन संख्याएँ ज्ञात कीजिए जिनका योग 15 तथा जिनके वर्गों का योग निम्नतम है।

(घ) यदि $\tan^{-1} \frac{a+x}{a} = \frac{\pi}{6} - \tan^{-1} \left(\frac{a-x}{a} \right)$ है तो सिद्ध

कीजिए $x^2 = 2\sqrt{3}a^2$

(ङ) यदि शीर्ष $(2, -6)$, $(5, 4)$ और $(k, 4)$ वाले त्रिभुज का क्षेत्रफल 35 वर्ग इकाई हो तो k का मान ज्ञात कीजिए।

(च) समाकलन कीजिए $\int \frac{dx}{(1+\cot x)}$

6. कोई पाँच खण्ड हल कीजिए। (प्रत्येक 5 अंक)

(क) यदि $A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 3 \\ 1 & -1 & 0 \end{bmatrix}$ है तो $A^2 - 5A + 6I$ का मान ज्ञात

कीजिए।

(ख) सिद्ध कीजिए

$$\begin{vmatrix} a-b-c & 2a & 2a \\ 2b & b-c-a & 2b \\ 2c & 2c & c-b-a \end{vmatrix} = (a+b+c)^3$$

(ग) यदि $x\sqrt{1+y} + y\sqrt{1+x} = 0$ तो सिद्ध कीजिए कि

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{1}{(1+x)^2}$$

(घ) सिद्ध कीजिए कि यदि वक्र $y=x^3$ और $xy=k$ एक दूसरे को लम्बवत काटते हैं तो $3k=1$.

(ङ) फलन $y=x^x$ के उच्चिष्ठ तथा निम्ननिष्ठ मान ज्ञात कीजिए।

(च) हल कीजिए : $\int \frac{1}{9x^2 + 6x + 5} dx$

7. कोई एक खण्ड हल कीजिए। (7 अंक)

(क) दिये हुए फलन की अवकलनीयता की जाँच कीजिए

$$f(x) = \begin{cases} e^x & \text{यदि } x \geq 0 \\ e^{-x} & \text{यदि } x < 0 \end{cases} \quad x=0 \text{ पर}$$

(ख) यदि $A = \begin{bmatrix} 2 & -3 & 3 \\ 2 & 2 & 3 \\ 3 & -2 & 2 \end{bmatrix}$ है तो A^{-1} ज्ञात कीजिए।

8. कोई एक खण्ड हल कीजिए। (8 अंक)

(क) दिये गए समीकरण निकाय को हल कीजिए।

$$2x+3y+3z = 5, \quad x-2y+z = -4, \quad 3x-y-2z = 3$$

(ख) हल कीजिए: $\int e^x \left(\frac{1+\sin x}{1+\cos x} \right) dx$

{ 4 } ●●●●